

مبحث : روابط طولی مثلث

نام دبیر: مهندس سامان اسپهرم
نام دوره: نوروز
شماره جلسه: جلسه پنجم
نام درس و مقطع و رشته: هندسه پایه - دوازدهم
ریاضی، فیزیک
تاریخ جلسه: ۱۴۰۲/۰۱/۰۶

نام کتاب	من در کلاس حل می کنم	خودتان حل کنید (در منزل یا کار در کلاس)
کتاب درسی		
کتاب آبی		
کتاب نوروز		



نکته برداری و خلاصه نویسی

قضیه سینوس ها

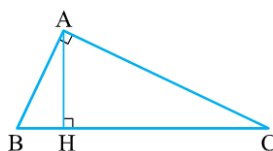
قبل از ورود به مطالب فصل آخر لازم است چند مطلب را که در فصل های قبلی مورد بررسی قرار گرفته اند دوباره یادآوری شوند. به ویژه در این بخش، روابط مثلثاتی از اهمیت ویژه ای برخوردار هستند که آگاهی از آنها می تواند حل بسیاری از مسائل را ساده کند.

چند یادآوری

روابط طولی در مثلث قائم الزاویه

ارتفاع نظیر وتر، واسطه هندسی بین دو قطعه ای است که روی وتر

جدا می کند، پس در شکل مقابل $AH^2 = BH \times CH$



هر ضلع زاویه قائمه، واسطه هندسی بین وتر و تصویر همان ضلع بر وتر است، پس در شکل فوق

$$AB^2 = BC \times BH \text{ و } AC^2 = BC \times CH$$

داریم:

چند رابطه مثلثاتی مهم

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

اگر α و β متمم یکدیگر باشند، آن گاه $\begin{cases} \sin \alpha = \cos \beta \\ \cos \alpha = \sin \beta \end{cases}$ و اگر α و β مکمل یکدیگر باشند،

$$\begin{cases} \sin \alpha = \sin \beta \\ \cos \alpha = -\cos \beta \end{cases} \text{ آن گاه}$$

رابطه سینوس ها در مثلث

اگر در مثلث ABC، $AB = c$ ، $AC = b$ و $BC = a$ و شعاع دایره محیطی آن، R باشد، آن گاه

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

روابط روبه رو، برقرار هستند:

روابط فوق را به صورت های زیر نیز می توان نوشت:

$$a = 2R \sin \hat{A} \text{ و } b = 2R \sin \hat{B} \text{ و } c = 2R \sin \hat{C}$$

تذکره هرگاه از مثلثی، اندازه دو زاویه و طول یک ضلع آن یا اندازه دو ضلع و زاویه ای که بین آن دو ضلع نیست معلوم باشند و بخواهیم سایر اجزای مثلث را پیدا کنیم، باید از رابطه سینوس ها استفاده کنیم.

در مثلث ABC، $b = 6$ ، $\hat{A} = 45^\circ$ و $\hat{C} = 75^\circ$ است. طول ضلع BC کدام است؟

$$1) \sqrt{6}(\sqrt{3}+1) \quad 2) \sqrt{6} \quad 3) \sqrt{6}(\sqrt{3}-1) \quad 4) 2\sqrt{6}$$



در هر مثلث، رابطه‌های زیر که به رابطه کسینوس‌ها مشهورند، برقرار هستند:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

این رابطه‌ها با رابطه‌های زیر معادل هستند:

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

تذکره مهم هرگاه در مثلثی، دو ضلع و زاویه بین آن دو ضلع یا اندازه‌های سه ضلع، معلوم باشند، برای پیدا کردن اجزای دیگر مثلث باید از رابطه کسینوس‌ها استفاده نمود.

؟ دو اتومبیل از نقطه تقاطع دو جاده که با هم زاویه 120° می‌سازند، یکی با سرعت 2 m/s و دیگری با سرعت 4 m/s هم‌زمان شروع به حرکت می‌کنند. پس از ۵ ثانیه فاصله آن‌ها از یکدیگر چه قدر است؟

$$20 \quad (2)$$

$$10\sqrt{3} \quad (1)$$

$$20\sqrt{2} \quad (4)$$

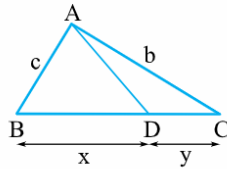
$$10\sqrt{7} \quad (3)$$

نکته مهم اگر در مثلثی $a^2 < b^2 + c^2$ باشد، آن‌گاه $\hat{A}$ زاویه‌ای حاده است و برعکس، زیرا $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > 0$ است.

اگر $a^2 > b^2 + c^2$ باشد، آن‌گاه $\hat{A}$ زاویه‌ای منفرجه است و برعکس. چنان‌چه $a^2 = b^2 + c^2$ باشد، آن‌گاه $\hat{A} = 90^\circ$ و برعکس.

قضیه استوارت

اگر D، نقطه‌ای دلخواه روی ضلع BC باشد، طوری که $BD = x$ و $CD = y$ ، آن‌گاه رابطه زیر برقرار است:



$$AB^2 \times y + AC^2 \times x = AD^2 \times BC + xy \times BC$$

$$c^2 y + b^2 x = AD^2 a + xya$$

یا:

این رابطه، به رابطه استوارت مشهور است.

محاسبه طول میانه‌های مثلث

اگر در رابطه استوارت نقطه D وسط ضلع BC باشد، آن‌گاه AD میانه است و اگر طول میانه نظیر رأس A را با m_a نمایش دهیم، آن‌گاه:

$$4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$$

$$4m_b^2 = 2(a^2 + c^2) - b^2$$

$$4m_c^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2$$

نکته مهم اگر $\hat{A} > 90^\circ$ ، آن‌گاه $a^2 < b^2 + c^2$ ، پس:

$$4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2 < 2a^2 - a^2 = a^2 \Rightarrow m_a < \frac{a}{2}$$

و اگر $\hat{A} < 90^\circ$ ، آن‌گاه به همین شیوه نتیجه می‌شود $m_a > \frac{a}{2}$ و چنان‌چه $\hat{A} = 90^\circ$ ، آن‌گاه $m_a = \frac{a}{2}$ (مطلب اخیر را از قبل می‌دانستیم، زیرا میانه نظیر وتر، در مثلث قائم‌الزاویه، نصف وتر است).

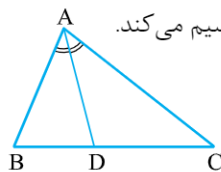
؟ در مثلثی به اضلاع $a = 5$ ، $b = 6$ و $c = 3$ ، طول میانه کوچک‌تر کدام است؟

$$3\sqrt{3} \quad (4)$$

$$2\sqrt{3} \quad (3)$$

$$2\sqrt{2} \quad (2)$$

$$3\sqrt{2} \quad (1)$$

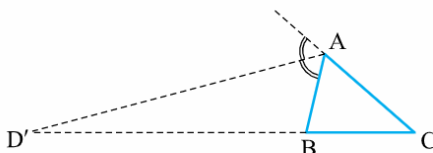


قضیه نیمساز هر زاویه داخلی مثلث، ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می کند.

در شکل بالا اگر AD نیمساز زاویه A باشد، آن گاه بنابر قضیه داریم:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

توجه کنیم که نیمساز زاویه خارجی هر مثلث نیز ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می کند؛

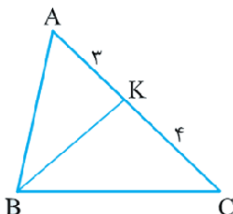


یعنی اگر AD' نیمساز زاویه خارجی رأس A باشد، آن گاه:

$$\frac{BD'}{CD'} = \frac{AB}{AC}$$

در شکل زیر، BK نیمساز زاویه داخلی B است. اگر محیط مثلث ۱۵/۴ باشد، طول ضلع

BC کدام است؟



۱) ۸/۴

۲) ۶/۳

۳) ۴/۴

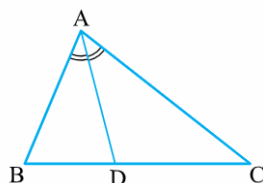
۴) ۴

محاسبه طول نیم ساز های داخلی مثلث

قضیه اگر AD، نیمساز زاویه داخلی A از مثلث ABC باشد، آن گاه

رابطه زیر برقرار است:

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$$



طول اضلاع مثلثی ۴، ۵ و ۶ هستند. طول نیمساز نظیر زاویه متوسط، کدام است؟

۴) ۳

۳) $3\sqrt{2}$

۲) $2\sqrt{3}$

۱) ۲

قضیه هرون، اگر در مثلث ABC فرض کنیم $P = \frac{a+b+c}{2}$ (P نصف محیط مثلث)، آن گاه

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

مساحت این مثلث، برابر است با:

اگر طول اضلاع مثلثی ۵، ۵ و ۶ باشد، مساحت مثلث کدام است؟

۴) ۲۴

۳) ۱۸

۲) ۱۲

۱) ۶

محاسبه طول ارتفاع های مثلث

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2}{a} \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \quad \text{پس} \quad S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$h_b = \frac{2S}{b} = \frac{2}{b} \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}, \quad h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2}{c} \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

در مثلثی، $a = 3$ ، $b = 5$ و $c = 6$ است. اندازه ارتفاع نظیر رأس B کدام است؟

۴) $\frac{1}{8}\sqrt{14}$

۳) $\frac{1}{7}\sqrt{14}$

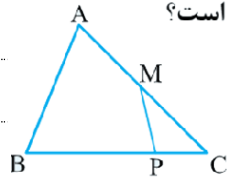
۲) $\frac{1}{6}\sqrt{14}$

۱) $\frac{1}{5}\sqrt{14}$



$$S = \frac{1}{2} a.b.\sin \hat{C} = \frac{1}{2} a.c.\sin \hat{B} = \frac{1}{2} b.c.\sin \hat{A}$$

در مثلث ABC داریم:



در شکل مقابل، $\frac{CM}{AM} = \frac{3}{4}$ و $\frac{CP}{BP} = \frac{2}{5}$ است. حاصل $\frac{S_{MPC}}{S_{ABC}}$ کدام است؟

$$\frac{5}{46} \quad (2)$$

$$\frac{3}{29} \quad (4)$$

$$\frac{6}{49} \quad (1)$$

$$\frac{4}{37} \quad (3)$$